Multidimensional zeta distributions and multidimensional quasi-infinitely divisible distributions (Various aspects of multiple zeta values)

中村, 隆

RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B68 (2017), 113–121

Multidimensional zeta distributions and multidimensional quasi-infinitely divisible distributions

By

Takashi NAKAMURA*

Abstract

This article is a survey on [1] and [11]. In [1], we give a not infinitely divisible but quasi-infinitely divisible characteristic function on $\mathbb{R}^2$. In [11], we give a quasi-infinitely divisible characteristic function $g(t)$ such that $(g(t))^u$ is not a characteristic function for any $u \in \mathbb{R}$ except for non-negative integers. Multidimensional Shintani zeta distributions play an important role in the proofs of the results above.

§1. 無限分解可能分布と擬無限分解可能分布

この章では，無限分解可能分布と擬無限分解可能分布に関する事柄を簡単にまとめる．記号や用語は主に佐藤 [12] に基づく．

§1.1. 特性関数

Ω を集合，$\mathcal{F}$ を σ 加法族，P を全測度 1 の測度とする．このとき三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間という．d 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ における Borel 集合全体を $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ で表し，$\mathbb{R}^d$ の Borel σ 加法族と呼ぶ．X が $\mathbb{R}^d$ 値の確率変数であるとは，Ω から $\mathbb{R}^d$ の中への $\mathcal{F}$ 可測な関数であること，即ち $\omega \in \Omega$ に対し $X(\omega) \in \mathbb{R}^d$ が定まり，全ての $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ となることである．$\mathrm{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ を $\mathrm{P}(X \in B)$ と略記する．B を動かすとき $\mathrm{P}(X \in B)$ は $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ の上で定義された確率測度であるが，これを $\mathbb{R}^d$ 上の X の分布という．

Received October 31, 2013. Revised March 25, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11M, 60E
Key Words: *infinitely divisible distributions, quasi-infinitely divisible distributions, Shintani zeta functions, zeta distributions.*
*Department of Liberal Arts, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, 2641 Yamazaki, Noda-shi, Chiba-ken, 278-8510, Japan.
e-mail: `nakamuratakashi@rs.tus.ac.jp`

n 個の $\mathbb{R}^d$ 値の確率変数から成る族 $\{X_1,\dots,X_n\}$ が独立であるとは，$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に属する任意の $B_1,\dots,B_n$ に対して，

$$\mathrm{P}(X_1\in B_1,\dots,X_n\in B_n)=\mathrm{P}(X_1\in B_1)\cdots\mathrm{P}(X_n\in B_n)$$

が成り立つことである．無限個の $\mathbb{R}^d$ 値の確率変数から成る族が独立であるとは，その任意の有限部分族が独立となることである．

$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ に対し，

$$\widehat{\mu}(z):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}\mu(dx),\qquad z\in\mathbb{R}^d$$

によって定義される関数 $\widehat{\mu}(z)$ を μ の特性関数という．特性関数 $\widehat{\mu}(z)$ は，$\widehat{\mu}(0)=1$, $|\widehat{\mu}(z)|\le 1$, $\widehat{\mu}(-z)=\overline{\widehat{\mu}(z)}$, ただし $\bar{t}$ は複素数 t の複素共役，を満たす $\mathbb{R}^d$ 上の一様連続関数となり，正定符号性，即ち任意の自然数 n に対して，

$$\sum_{k,l=1}^{n}\widehat{\mu}(z_k-z_l)\xi_k\overline{\xi_l}\ge 0,\qquad z_1,\dots,z_n\in\mathbb{R}^d,\quad \xi_1,\dots,\xi_n\in\mathbb{R},$$

を持つことが知られている．逆に $\mathbb{R}^d$ 上の関数がこれらの条件を満たせば，その関数は特性関数になることが知られている (Bochner の定理).

$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ_1,μ_2 から

$$\mu(B)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}1_B(x+y)\mu_1(dx)\mu_2(dy),\qquad B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$$

によって定義される $\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ を $\mu=\mu_1*\mu_2$ と表し，μ_1 と μ_2 のたたみこみという．たたみこみの演算は交換法則，結合法則に従う．X_1,X_2 が独立な $\mathbb{R}^d$ 値の確率変数で，その分布がそれぞれ μ_1,μ_2 であるならば，X_1+X_2 の分布が $\mu=\mu_1*\mu_2$ である．さらに，$\mu=\mu_1*\mu_2$ であるとき $\widehat{\mu}(z)=\widehat{\mu_1}(z)\widehat{\mu_2}(z)$ が成立する．

最後に特性関数の例を挙げる．

(i) $d=1$, 平均 $c>0$ の Poisson 分布は $\mu(\{k\}):=e^{-c}c^k/k!$, $k=0,1,2,\dots$, $\mu(B):=0$，B は非負の整数を含まないとき, である．このときその特性関数は $\widehat{\mu}(z)=\exp(c(e^{\mathrm{i}z}-1))$, $z\in\mathbb{R}$ である．

(ii) $d=1$, 平均 $\gamma\in\mathbb{R}$, 分散 $a>0$ の Gauss 分布は $\mu(B):=(2\pi a)^{-1/2}\int_B e^{-(x-\gamma)^2/(2a)}$. このとき $\widehat{\mu}(z)=\exp(-az^2/2+\mathrm{i}\gamma z)$, $z\in\mathbb{R}$. さらに，$\gamma\in\mathbb{R}^d$ と非負の定符号対称行列 A に対し, $\widehat{\mu}(z)=\exp(-\langle z,Az\rangle/2+\mathrm{i}\langle\gamma,z\rangle)$, $z\in\mathbb{R}^d$ となる μ を $\mathbb{R}^d$ 上の Gauss 分布と呼ぶ.

(iii) 一点 $\gamma\in\mathbb{R}^d$ に集中している分布を γ における δ 分布と呼び，δ_γ で表し，その特性関数は $e^{\mathrm{i}\langle\gamma,z\rangle}$ である．

(iv) $\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ が複合 Poisson 分布であるとは，ある $c>0$ と $\sigma(\{0\})=0$ を満たす $\mathbb{R}^d$ 上の分布 σ によって，μ の特性関数が $\widehat{\mu}(z)=\exp(c(\widehat{\sigma}(z)-1))$, $z\in\mathbb{R}^d$ と表されることである．$d=1$ で σ が 1 における δ 分布のときが，Poisson 分布である．

§ 1.2. Lévy–Khintchine の標準形

分布 μ の n 個のたたみこみを μ^{n*} と書く．$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ が無限分解可能であるとは，任意の自然数 n に対し，分布 μ_n が存在して $\mu = \mu_n^{n*}$ となることである．特性関数でいえば，たたみこみは掛け算に対応するから，μ が無限分解可能であるとは，$\widehat{\mu}(z)$ の n 乗根として特性関数になっているものが存在するということである．$\mathbb{R}^d$ 上の Gauss 分布，δ 分布，複合 Poisson 分布は無限分解可能である．一様分布，二項分布は無限分解可能ではない．

μ が無限分解可能ならば，その特性関数 $\widehat{\mu}(z)$ は零点を持たないことが知られている．$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ に対し，$\int_{|x|>\varepsilon} \mu(dx) < \varepsilon$ であるとき $\mu \in v(\varepsilon)$ と書けば，μ が無限分解可能分布であることは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\mu = \mu_1 * \cdots * \mu_n, \qquad \mu_1, \ldots, \mu_n \in v(\varepsilon)$$

となることと同等である. 確率変数列 X_{kl}, $l = 1, 2, \ldots, n(k)$ が各 k において独立であり，それらの分布が $v(\varepsilon_k)$ に属すとし，$k \to \infty$ であるとき $\varepsilon_k \to 0$ と仮定する．このとき，和 $X_k = \sum_{l=1}^{n(k)} X_{kl}$ の分布の極限分布は無限分解可能である (岩波数学辞典第 4 版参照).

$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ が無限分解可能ならば，その特性関数は

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + \mathrm{i}\langle \gamma, z\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle} - 1 - \frac{\mathrm{i}\langle z, x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu(dx)\right], \tag{1.1}$$

$z \in \mathbb{R}^d$, と表される．ここで $\gamma \in \mathbb{R}^d$, A は非負の定符号対称行列，ν は $\mathbb{R}^d$ 上の測度で $\nu(\{0\}) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \min\{|x|^2, 1\}\nu(dx) < \infty$ であり，Lévy 測度と呼ばれる．(1.1) を Lévy–Khintchine の標準形と呼ぶ．(A, ν, γ) は分布 μ から一意に定まる．逆に上記の条件を満たす (A, ν, γ) が与えられたとき，(1.1) の右辺は $\mathbb{R}^d$ 上のある無限分解可能分布の特性関数である．さらに $\int_{|x|<1} |x|\nu(dx) < \infty$ を満たしていれば，(1.1) は

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + \mathrm{i}\langle \gamma_0, z\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle} - 1\right)\nu(dx)\right], \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

ただし $\gamma_0 \in \mathbb{R}^d$ と書ける．この論説では主に (1.2) の形で表される (擬) 無限分解可能分布の特性関数を扱う．

無限分解可能の例を挙げる．$\mathbb{R}^d$ 上の Gauss 分布は Lévy–Khintchine の標準形において $\nu = 0$ の場合である．複合 Poisson 分布は Lévy 測度が $\nu = c\sigma$ の場合であり，その特性関数の表現は (1.2) おいて $A = 0$, $\gamma_0 = 0$ としたものである．無限分解可能分布は複合 Poisson 分布の極限であることが知られている．

§ 1.3. 擬無限分解可能分布

$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ の特性関数 $\widehat{\mu}$ が Lévy–Khintchine の標準形 (1.1) と同じ形で書けるが，ただし A は対称行列で，ν は $\mathbb{R}^d$ 上の符号付き測度で $\nu(\{0\}) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \min\{|x|^2, 1\}|\nu|(dx) < \infty$ を満たすものであるとき，μ は $\mathbb{R}^d$ 上の擬無限分解可能分布と呼ばれる．擬無限分解可

能分布のうち ν の Jordan 分解における負の部分が 0 のものが無限分解可能分布である．擬無限分解可能分布の特性関数は，$\widehat{\mu_1}(z)/\widehat{\mu_2}(z)$，ただし μ_1, μ_2 を無限分解可能分布，と書くことができるものと言い換えられる．Lévy–Khintchine の標準形から擬無限分解可能分布の特性関数は零点を持たないことが分かる．無限分解可能分布は独立確率変数の配列の和の極限分布として特徴づけることもできるが，擬無限分解可能分布についてはそのような事実は知られていない．擬無限分解可能分布は，Gnedenko and Kolmogorov [3, p. 81], Linnik and Ostrovskii [7, Chapter 6, Section 7], Niedbalska-Rajba [10], Lindner and Sato [6] などで扱われている．論説 [14, §2.4], あるいは [12] の英語版である [13] の Exercise 12.2 を参照して頂きたい．

上記の論文や教科書で扱われているものは全て 1 次元 ($d = 1$ の場合) であった．そこで "多次元の擬無限分解可能分布の例を構成する" という問題が自然に発生してくる．一方，2011 年 11 月に統計数理研究所で開催された研究集会,「無限分解可能過程に関連する諸問題」において，[12] の著者である佐藤健一先生は筆者に次のような未解決問題を提起した．"$\widehat{\mu}(z)$ を特性関数とする擬無限分解可能分布のどの例に対しても，$\widehat{\mu}(z)^u$ が特性関数とならないような実数 u がどれだけあるのか?" これは [14, §2.4] にある，To find a necessary and sufficient condition for a signed measure to be a quasi-Levy measure is an open problem の特別な場合である．この論説では上記の 2 つの " " で挟まれた未解決問題を解いた 2 つの論文 [1] と [11] について解説する．いずれの論文においても証明で重要な役割を果たすものは, 次の章で導入される多次元新谷ゼータ分布である．

§ 2.　多次元新谷ゼータ関数と分布

著者と青山氏は多次元新谷ゼータ関数と分布を [2] において導入した．この章では多次元新谷ゼータ関数と分布について解説する．

§ 2.1.　多次元新谷ゼータ関数

Definition 2.1 (多次元新谷ゼータ関数, [2]).　*$d, m, r \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ とする．このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0$, $\vec{c_l} \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq l \leq m)$ 及び, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|\theta(n_1, \ldots, n_r)| = O((n_1 + \cdots + n_r)^\varepsilon)$ を満たす複素数値関数 $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ に対し, 多次元新谷ゼータ関数 $Z_S(\vec{s})$ を以下の級数で定義する．*

$$Z_S(\vec{s}) := \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{\prod_{l=1}^m (\lambda_{l1}(n_1 + u_1) + \cdots + \lambda_{lr}(n_r + u_r))^{\langle \vec{c_l}, \vec{s} \rangle}},$$

ただし $\min_{1 \leq l \leq m} \Re\langle \vec{c_l}, \vec{s} \rangle > r/m$ とする．上の級数はこの領域で絶対収束する．$\vec{c_l} \in \mathbb{R}^d$ が各軸方向の単位ベクトル，即ち $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$，である場合は整数論でしばしば扱われる．例として，$d = m = r$, $\lambda_{11} = \cdots = \lambda_{mr} = 1$, $\vec{c_1} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{c}_m = (0, \ldots, 0, 1)$, $\theta(n_1, \ldots, n_m) = 1$ $(n_1 > \cdots > n_r > 0)$ $\theta(n_1, \ldots, n_m) = 0$ (その他) とす

ると，

$$Z_S(\vec{s}) = \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0}^{\infty} \frac{1}{(n_1+u_1)^{s_1}(n_2+u_2)^{s_2}\cdots(n_r+u_r)^{s_r}}$$
$$= \sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1+\cdots+n_r+u_1)^{s_1}(n_2+\cdots+n_r+u_2)^{s_2}\cdots(n_r+u_r)^{s_r}},$$

が得られ，Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数になる．$\theta(n_1,\ldots,n_m)$ を上手く指定することにより，上記のゼータ関数は数多くの既存のゼータ関数を含むことが分かる．多重ゼータ関数の歴史や最近の発展については，論説 [8] などを参照して頂きたい．

§ 2.2. 多次元新谷ゼータ分布

Definition 2.2 (多次元新谷ゼータ分布, [2]). 定義 *2.1* の仮定の上に，さらに係数 $\theta(n_1,\ldots,n_r)$ を定符号とし，$\vec{c}_l = (c_{l1},\ldots,c_{ld}) \in \mathbb{R}^d$ と書くことにする．このとき確率変数 $X_{\vec{\sigma}}$ が以下の分布に従うとき多次元新谷ゼータ確率変数, その分布を多次元新谷ゼータ分布という．

$$\mathrm{P}_{X_{\vec{\sigma}}}\Bigg(\Bigg\{ -\sum_{l=1}^{m} c_{l1} \log\big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big),$$
$$\ldots, -\sum_{l=1}^{m} c_{ld} \log\big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big)\Bigg\}\Bigg)$$
$$= \frac{\theta(n_1,\ldots,n_r)}{Z_S(\vec{\sigma})} \prod_{l=1}^{m} \big(\lambda_{l1}(n_1+u_1)+\cdots+\lambda_{lr}(n_r+u_r)\big)^{-\langle \vec{c}_l, \vec{\sigma}\rangle}.$$

多次元新谷ゼータ分布の特性関数は

$$f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) = \frac{Z_S(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})}{Z_S(\vec{\sigma})}, \qquad \vec{t} \in \mathbb{R}^d.$$

と書ける．これは Riemann ゼータ分布 ([4], [5] 等を参照) の一般化である．$\theta(n_1,\ldots,n_m)$ を上手くとれば，多次元新谷ゼータ分布は 1 点分布，二項分布，負の二項分布，Poisson 分布，超幾何分布，対数級数分布，離散一様分布，離散パレート分布 (ジップ分布) などを含むことがわかる．このことについては [9] を参照して頂きたい．

§ 3. 主結果

この章では我々の主結果について解説する．§3.1 が “多次元の擬無限分解可能分布の例を構成する” という問題に対する [1] で得られた解答であり，§3.2 が “$\widehat{\mu}(z)$ を特性関数とする擬無限分解可能分布のどの例に対しても，$\widehat{\mu}(z)^u$ が特性関数とならないような実数 u がどれだけあるのか?” という問題に対する [11] で得られた解答である．

§ 3.1. 主結果 1

p を素数, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ とし，$\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2)$, $\vec{t} := (t_1, t_2)$ とおく．多次元オイラー因子 $g_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t})$ と $g_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t})$ を以下のように定義する．

$$g_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \bigl(1 - p^{-(\sigma_1 + \mathrm{i}t_1)}\bigr)^{-1}\bigl(1 - p^{-(\sigma_2 + \mathrm{i}t_2)}\bigr)^{-1}, \quad g_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \bigl(1 + p^{-(\sigma_1 + \mathrm{i}t_1) - (\sigma_2 + \mathrm{i}t_2)}\bigr)^{-1}.$$

さらにそれらを正規化したものを $G_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t})$, $G_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t})$ とおく．即ち

$$G_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{0})}, \qquad G_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{0})}.$$

Theorem 3.1. 関数 $G_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t}) G_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t})$ は $\mathbb{R}^2$ 上の無限分解可能でない擬無限分解可能分布の特性関数である．

上の例で $\sigma := \sigma_1 = \sigma_2$, $t = t_1 = t_2$ とすると $G_p^{\#}(\sigma, t) G_p^{*}(\sigma, t)$ は $\mathbb{R}$ 上の無限分解可能分布の特性関数であることを注意しておく．以下に定理 3.1 の証明の概説をする．

まず $G_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t}) G_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t})$ の Lévy–Khintchine の標準形 (1.2) を求める．

$$\begin{aligned}
\log G_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t}) G_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t}) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma_1} \bigl(p^{-r\mathrm{i}t_1} - 1\bigr) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma_2} \bigl(p^{-r\mathrm{i}t_2} - 1\bigr) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} p^{-r(\sigma_1 + \sigma_2)} \bigl(p^{-r\mathrm{i}(t_1 + t_2)} - 1\bigr) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \bigl(e^{-\mathrm{i}\langle \vec{t}, x\rangle} - 1\bigr) N_{\vec{\sigma}}^{G_p^{\#} G_p^{*}}(dx),
\end{aligned}$$

ただし $N_{\vec{\sigma}}^{G_p^{\#} G_p^{*}}(dx)$ は次で定義されるものである．

$$\begin{aligned}
N_{\vec{\sigma}}^{G_p^{\#} G_p^{*}}(dx) := &\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma_1} \delta_{\log p^r (1,0)}(dx) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma_2} \delta_{\log p^r (0,1)}(dx) \\
&+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} p^{-r(\sigma_1 + \sigma_2)} \delta_{\log p^r (1,1)}(dx).
\end{aligned}$$

ここで右辺第 3 項 $\sum_{r=1}^{\infty} r^{-1} (-1)^r p^{-r(\sigma_1 + \sigma_2)} \delta_{\log p^r (1,1)}(dx)$ は測度ではなく符号付き測度である．なぜならば，$p_1^{r_1} = p_2^{r_2} \iff p_1 = p_2,\ r_1 = r_2$ であるので，$r = 1$ で発生した -1 はキャンセルされることはない．よって $G_p^{\#}(\vec{\sigma}, \vec{t}) G_p^{*}(\vec{\sigma}, \vec{t})$ の Lévy–Khintchine の標準形は (1.2) において，

$$A = 0, \qquad \gamma_0 = 0, \qquad \nu = N_{\vec{\sigma}}^{G_p^{\#} G_p^{*}}$$

と成ることが分かる．

次に $G_p^{\#}(\vec{\sigma},\vec{t})G_p^{*}(\vec{\sigma},\vec{t})$ が特性関数であることを示す．複素数 $|X|, |Y| < 1$ に対して，

$$\frac{1-XY}{(1-X)(1-Y)} = \frac{1}{1-X} + \frac{1}{1-Y} - 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(X^n + Y^n\bigr)$$

である．この恒等式により，

$$\begin{aligned}
g_p^{\#}(\vec{\sigma},\vec{t})g_p^{*}(\vec{\sigma},\vec{t}) &= \bigl(1-p^{-s_1}\bigr)^{-1}\bigl(1-p^{-s_2}\bigr)^{-1}\bigl(1+p^{-s_1-s_2}\bigr)^{-1} \\
&= \frac{1}{1-p^{-2s_1-2s_2}}\frac{1-p^{-s_1-s_2}}{(1-p^{-s_1})(1-p^{-s_2})} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{p^{2l(s_1+s_2)}}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^{ms_1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^{ns_2}}\right).
\end{aligned}$$

したがって

$$g_p^{\#}(\vec{\sigma},\vec{t})g_p^{*}(\vec{\sigma},\vec{t}) = \sum_{l,m,n=1}^{\infty}\frac{A(l)A(m,n)}{l^{s_1+s_2}m^{s_1}n^{s_2}},$$

ただし $a,b,c \in \mathbb{N}$ とし，

$$A(l) := \begin{cases} 1 & l = 1,\, p^{2a}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad A(m,n) := \begin{cases} 1 & (m,n) = (1,1),\, (1,p^b),\, (p^c,1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と書くことができる．$A(l) \geq 0$, $A(m,n) \geq 0$ に注意すれば $G_p^{\#}(\vec{\sigma},\vec{t})G_p^{*}(\vec{\sigma},\vec{t})$ は多次元新谷ゼータ分布の特性関数になることが分かる．

よって $G_p^{\#}(\vec{\sigma},\vec{t})G_p^{*}(\vec{\sigma},\vec{t})$ は $\mathbb{R}^2$ 上の無限分解可能でない擬無限分解可能分布の特性関数である．

論文 [1] ではこの他にも多次元有限オイラー積が分布になるかどうかなどを判定している．詳細は [1] を参照して頂きたい．

§ 3.2. 主結果２

p を素数, $\sigma > 0$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，関数 $g(t)$ を以下のように定義する．

$$g(t) := \frac{1+p^{-\sigma-\mathrm{i}t}}{1+p^{-\sigma}}.$$

Theorem 3.2. 関数 $g(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の無限分解可能でない擬無限分解可能分布の特性関数であり，$(g(t))^u$ が特性関数となるのは $u \in \mathbb{N}_0$ であるときに限る．

以下に定理 3.2 の証明の概略を述べる．

まず $g(t)$ が $\mathbb{R}$ 上の無限分解可能でない擬無限分解可能分布の特性関数であることを示す．$g(t)$ は一次元新谷ゼータ分布の特性関数になることは直ぐに分かる．Lévy–Khintchine の標準形 (1.2) は

$$\log g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{np^{n\sigma}}\bigl(p^{-n\mathrm{i}t}-1\bigr) = \int_{\mathbb{R}}\bigl(e^{-\mathrm{i}tx}-1\bigr)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{np^{n\sigma}}\delta_{n\log p}(dx)$$

から，(1.2) において，

$$A=0, \qquad \gamma_0=0, \qquad \nu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{np^{n\sigma}}\delta_{n\log p}(dx)$$

であり，これは測度ではなく符号付き測度である．

次に後半を示す．$(g(t))^0=1$ であるからこれは特性関数である．さらに特性関数と特性関数の積は特性関数となるので，$(g(t))^u$ は $u\in\mathbb{N}$ であるとき特性関数になる．$u<0$ であるときは

$$|(g(t))^u|=\frac{|1+p^{-\sigma-\mathrm{i}t}|^u}{|1+p^{-\sigma}|^u}>1$$

を満たす $t\in\mathbb{R}$ が存在するので，$(g(t))^u$ は特性関数にならない．特性関数の定義からその絶対値は 1 を越えないことを注意しておく．最後に $0<u\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ とする．

$$\bigl(1+p^{-s}\bigr)^u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}, \qquad a(n):=\begin{cases}\binom{u}{m} & n=p^m;\ m\in\mathbb{N}_0\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

となる．ここで $a(1)=1$ であり，

$$a\bigl(p^{2+\lfloor u\rfloor}\bigr)=\frac{u\times\cdots\times(u-\lfloor u\rfloor)}{1\times\cdots\times(\lfloor u\rfloor+1)}\times\frac{u-\lfloor u\rfloor-1}{\lfloor u\rfloor+2}<0$$

となるので次の補題から $(g(t))^u$ は特性関数にならない．

Lemma 3.3. *$L(s):=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$, ただし $a(n)=1$, $|a(n)|=O(n^{\varepsilon})$ を満たすし，ある半平面で絶対収束すると仮定する．このとき $L(\sigma+\mathrm{i}t)/L(\sigma)$ が特性関数となる必要十分条件は全ての $n\in\mathbb{N}$ に対し $a(n)\geq 0$ である．*

この補題の証明は省略する．詳細は [11] を見て頂きたい．

References

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, *Mathematische Nachrichten.* **286** (2013) no. 17-18, 1691–1700. http://arxiv.org/abs/1204.4043.

[2] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, *Tokyo Journal Mathematics.* **36** (2013) no. 2, 289–570. http://arxiv.org/abs/1204.4042.

[3] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Translated from the Russian by Kai Lai Chung)* (Addison-Wesley, 1968).

[4] A. Ya. Khinchine, *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*, (Moscow and Leningrad, 1938).

[5] G. D. Lin and C.- Y. Hu, 'The Riemann zeta distribution', *Bernoulli.* **7** (2001) 817–828.

[6] A. Lindner and K. Sato, 'Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes', *Math. Nachr.* **284** (2011) 2225–2248.

[7] J. V. Linnik and I. Ostrovskii, 'Decompositions of Random Variables and Vectors', (American Mathematical Society, Providence, RI, 1977 (Translation from the Russian original of 1972)).

[8] K. Matsumoto, *Analytic theory of multiple zeta-functions and its applications.* (in Japanese) *Sūgaku.* **59** (2007), no. 1, 24–45.

[9] S. Mizukami and T. Nakamura, 'Generalized Hurwitz Zeta Distributions', *Šiauliai Mathematical Seminar* (Special issue celebrating the 65th birthday of Professor Antanas Laurinčikas) **8** (2013), 181–196.

[10] T. Niedbalska-Rajba, 'On decomposability semigroups on the real line', *Colloq. Math.* **44** (1981) 347–358.

[11] T. Nakamura, 'A quasi-infinitely divisible characteristic function and its exponentiation', *Statistics and Probability Letters.* **83** (2013), 2256–2259.

[12] 佐藤健一, 加法過程 (紀伊國屋数学叢書 33), 紀伊國屋書店 1990.

[13] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* (Cambridge University Press, 1999).

[14] 佐藤健一, レヴィ過程による確率積分と無限分解可能分布, 数学 **63** no. 2 (2011), 161–181.